

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Neamț
08.02.2025
Clasa a VI-a

Problema 1.

Determinați ultima cifră a mediei aritmetice a primelor $2p+1$ numere ale mulțimii $M = \{x \in \mathbb{N} / x \geq 2 \text{ și } \frac{2x+1}{6x-7} \text{ este reductibilă}\}$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Soluție și barem:

$\frac{2x+1}{6x-7}$ reductibilă \Rightarrow există $d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$ astfel încât $d \mid (2x+1)$ și $d \mid (6x-7)$.

Rezultă că $d \mid 10$, adică $d \in \{2, 5, 10\}$. Cum $2x+1$ și $6x-7$ sunt impare, rezultă $d = 5$2p

Deci $2x+1 = 5k$, k impar.

$k = 2 \cdot n + 1 \Rightarrow 2x+1 = 5(2n+1) \Rightarrow x_n = 5n+2$, $n \geq 1$2p

Primele $2p+1$ numere din mulțimea M sunt $\{5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 3 + 2, \dots, 5 \cdot (2p+1) + 2\}$ iar media lor aritmetică este: $m_a = \frac{5 \cdot (1+2+3+\dots+(2p+1)) + 2 \cdot (2p+1)}{2p+1} = 5p+7$

.....2p

Ultima cifră a lui m_a este 2 sau 7.....1p

Problema 2.

Considerăm $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$, $\sphericalangle A_3OA_4$, \dots , $\sphericalangle A_9OA_{10}$, $\sphericalangle A_{10}OA_1$ unghiuri în jurul punctului O , astfel încât $m(\sphericalangle A_1OA_2) = t^\circ$, $m(\sphericalangle A_2OA_3) = (t+p)^\circ$, $m(\sphericalangle A_3OA_4) = (t+2p)^\circ$, ...

$m(\sphericalangle A_{10}OA_1) = (t+9p)^\circ$, $t, p \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați $m(\sphericalangle A_2OA_{10})$.

b) Demonstrați că dacă $t < 2p$, atunci $[OA_5]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_1OA_7$.

Soluție și barem:

a) $t+t+p+t+2p+\dots+t+9p=360^\circ \Rightarrow 2 \cdot t+9 \cdot p=72^\circ$2p

$m(\sphericalangle A_2OA_{10}) = m(\sphericalangle A_2OA_1) + m(\sphericalangle A_1OA_{10}) = t + (t+9p) = 2t+9p = 72^\circ$1p

b) $2t+9p=72^\circ \Rightarrow 9p = \text{par} \Rightarrow p = \text{par}$. $p = 2k \Rightarrow t+9k = 36^\circ$1p

$t < 2p \Rightarrow t < 4k \Rightarrow 36-9k < 4k \Rightarrow k \geq 3$

$t, k \in \mathbb{N}^*$ și $t+9k = 36^\circ \Rightarrow k < 4$. Deci $k = 3$.



Atunci $t = 9^\circ$ și $p = 6^\circ$ 2p

Deci $\sphericalangle A_1OA_5 = 9 + (9 + 6) + (9 + 12) + (9 + 18) = 72^\circ$ iar $\sphericalangle A_5OA_7 = \sphericalangle A_5OA_6 +$

$\sphericalangle A_6OA_7 = (9 + 24) + (9 + 30) = 72^\circ$ 1p

Problema 3.

Câte unghiuri cu măsurile de 10° și 18° putem construi în jurul unui punct?

E:17044 (Gazeta Matematică nr 11/2024)

Soluție și barem:

Fie x numărul unghiurilor de măsură 10° și y numărul unghiurilor de măsură 18° .

$$10^\circ x + 18^\circ y = 360^\circ \Leftrightarrow 5^\circ x + 9^\circ y = 180^\circ \Leftrightarrow 5^\circ x = 9^\circ (20 - y) \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$9 \mid x \Rightarrow x \in \{0, 9, 18, 27, 36, \dots\} \quad \dots\dots\dots 2p$$

Obținem $(x, y) \in \{(0, 20), (9, 15), (18, 10), (27, 5), (36, 0)\}$, 5 variante3p

Problema 4.

Fie numărul $\overline{abcd}:13$.

a) Demonstrați că $\overline{dbca}:13$ dacă și numai dacă $\overline{bc}:13$ și dați un exemplu de astfel de numere.

b) Câte numere $\overline{abcd}:13$ au proprietatea că $\overline{dbca}:13$?

Soluție și barem:

a)

$$\begin{aligned} \overline{abcd}:13 &\Leftrightarrow 1000 \cdot a + 10 \cdot \overline{bc} + d : 13 \Leftrightarrow 1001 \cdot a + 10 \cdot \overline{bc} + d - a : 13 \Leftrightarrow \\ 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot a + 10 \cdot \overline{bc} + d - a : 13 &\Leftrightarrow 10 \cdot \overline{bc} + d - a : 13 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{aligned} \overline{dbca}:13 &\Leftrightarrow 1000 \cdot d + 10 \cdot \overline{bc} + a : 13 \Leftrightarrow 1001 \cdot d + 10 \cdot \overline{bc} + a - d : 13 \Leftrightarrow \\ 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot d + 10 \cdot \overline{bc} + a - d : 13 &\Leftrightarrow 10 \cdot \overline{bc} + a - d : 13 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 1p$$

Din (1) și (2) rezultă că $\overline{bc}:13$ și $d - a : 13 \Rightarrow a = d$

Reciproc, dacă $\overline{bc}:13$, atunci din (1) rezultă că $1001 \cdot d + 10 \cdot \overline{bc} + a - d : 13 \Rightarrow \overline{dbca}:13 \quad \dots\dots\dots 2p$

Un exemplu $\overline{abcd} = \overline{dbca} = 2132 \quad \dots\dots\dots 1p$

b) $\overline{bc} \in \{00, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91\}$ și $(a, d) \in \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (9, 9)\} \quad \dots\dots\dots 1p$

$8 \cdot 9 = 72$ de astfel de numere 1p



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN NEAMȚ

Inspectoratul Școlar Județean Neamț

Piatra-Neamț, județul Neamț, str. Lt. Drăghiescu, nr. 4A

tel. 0233/214860 | fax 0233/215807 | e-mail: office@isjneamt.ro | site: www.isjneamt.ro